בי״ס למדעי המחשב ומתמטיקה, תשס״ג, 24.08.2003
מבנים אלגבריים, סמסטר ב׳, מועד ב׳.
שם המרצה: פרופ׳ מ. מוזיצ׳וק.
משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק <u>במחשיבון</u> <u>ובדפי עזר המצורפים</u> לטופס הבחינה.

חלק א׳: בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.

<u>1. 12 נקודות</u>

תהי $(G,*)$ חבורה כלשהי. מעל הקבוצה $\overline{G}=\{(a,b)\mid a,b\in G\}$ נגדיר פעולה # ע״י הנוסחה $(a,b)\#(c,d)=(a*c,b*d)$. לכל תת-חבורה H של G נגדיר קבוצה $\overline{H}$ ע״י הנוסחה $\overline{H}=\{(a,b)\mid a,b\in H\}$. הוכח ש- $\overline{H}\le\overline{G}$.

<u>2. 12 נקודות</u>

הוכח שלכל פולינום $f(x)\in F[x]$ ולכל סקלר $a\in F$ התנאים הבאי שקולים:

א. a שורש של $f(x)$ (כלומר $f(a)=0$).

ב. $f(x)$ מתחלק ב- $x-a$ ללא שארית.

<u>3. 13 נקודות</u>

אם $f(x),g(x)\in F[x]$ שני פולינומים כלשהם, $g(x)\ne 0(x)$, אז קיימים שני פולינומים $q(x),r(x)\in F[x]$ כך ש:

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$$
$$\deg(r(x))<\deg(g(x))$$

<u>4. 13 נקודות</u>

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם חבורות.

א. הוכח שאם f ״על״ ו G אבלית, אז גם H אבלית.

ב. הוכח שאם f חח״ע ו H אבלית, אז גם G אבלית.

חלק ב': יש לענות על 5 שאלות. תשובות לחלק זה ייבדקו רק בטופס הבחינה.

5. 10 נקודות.

שתי תמורות של הקבוצה $\mathbf{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

$f = (0,5,3,1)(2,4,6),\ g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x+5}{5x+3}, x \neq 5 \\ 6, x = 5 \end{cases}, x \in \mathbf{Z}_7$ (הפעולות מתבצעות ב-$\mathbf{Z}_7$).

א. חשב את gf^2:	
ב. פרק את gf^2 למכפלה של מחזורים זרים:	
ב. מצא את הסדר של gf^2	
ג. פרק את gf^2 למכפלה של חילופים:	

6. 10 נקודות.

חשב את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:

$a(x) = x^4 + 3x^3 + 4 \in \mathbf{Z}_5[x],\ b(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbf{Z}_5[x]$.

$\gcd(a(x), b(x)) =$

7. 10 נקודות.

מצא את פתרון פרטי של המשוואה $374x + 238y = 34$ בשלמים.

$x =$ $y =$

[illegible]. 10 נקודות.

[illegible] סימטרית S_4.

[illegible] שמאליות של S_4 לפי תת החבורה [illegible]

$.H=\{id,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

9. 10 נקודות.

נתונה חבורת מטריצות $G=\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$. רשום את כל האברים של החבורה ומול כל איבר רשום את הסדר שלו.

בהצלחה!